



## FLUXO E DIVERGENTE DE UM CAMPO VETORIAL

Os conceitos de divergente e rotacional estão relacionados aos de fluxo e de circulação respectivamente. Nesta e na próxima seção, faremos uma definição precisa destes conceitos e os associaremos com alguns fenômenos físicos conhecidos.

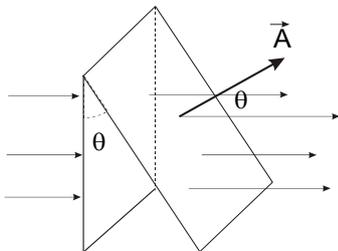
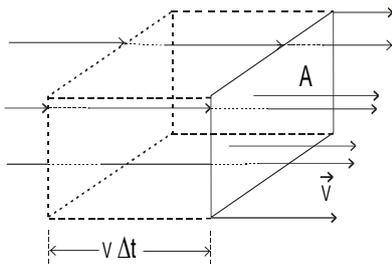
### 1. FLUXO

#### a. Fluxo através de uma superfície aberta plana

Suponha inicialmente uma superfície plana de área  $A$  dentro de um campo de velocidades  $\vec{v}$ . Este campo pode ser, por exemplo, um rio, um fluxo de gás dentro de uma tubulação, etc. De qualquer forma, haverá nesse campo um fluido onde a cada ponto associaremos um vetor velocidade  $\vec{v}$ . Neste primeiro enfoque vamos supor que o campo é uniforme (ou seja, a velocidade é a mesma para todos os pontos desse espaço e a direção e sentido se mantem constante) e que a superfície esteja perpendicular ao campo. Definimos então

$$[\text{FLUXO}] = \Phi = \frac{[\text{Quantidade de fluido que atravessa a superfície } A \text{ no tempo } \Delta t]}{[\text{unidade de tempo}]}$$

(sup. aberta)



Podemos expressar esta definição em termos de  $v$  e de  $A$  com a seguinte consideração: num tempo  $\Delta t$ , cada partícula do fluido percorre uma distância  $v \Delta t$ . Assim, se construirmos um paralelepípedo de base  $A$  e comprimento  $v \Delta t$ , notaremos que toda a partícula que estiver dentro desta "caixa" atravessa a superfície  $A$  no tempo  $\Delta t$ . As partículas que estiverem fora não conseguirão, neste tempo, atravessar a superfície. Assim, a quantidade de fluido que atravessa a superfície  $A$  no tempo  $\Delta t$  será simplesmente o volume dessa "caixa" e vale  $v \Delta t A$ . O fluxo será então

$$\Phi = \frac{v \Delta t A}{\Delta t} = v A$$

Suponha agora que a superfície  $A$  esteja inclinada de um ângulo  $\theta$ , como mostra a figura. Observe que a quantidade de fluido que atravessa  $A$  no tempo  $\Delta t$  é a mesma que atravessa  $A'$  (que é a projeção de  $A$  em um plano perpendicular às linhas de campo). Assim  $\Phi_A = \Phi_{A'} = v A'$ .

Como  $A' = A \cos \theta$ , logo  $\Phi_A = v A \cos \theta$

Podemos simplificar esta relação, usando o vetor área  $\vec{A}$ , que é definido como:

$$\vec{A} = \begin{cases} \text{módulo: área } A \\ \text{direção: perpendicular à superfície } A \\ \text{sentido: é tal que } \theta \leq 90^\circ \end{cases} \quad (1)$$

Desta forma, podemos escrever o fluxo de um campo vetorial uniforme  $\vec{v}$  para uma superfície plana como sendo:

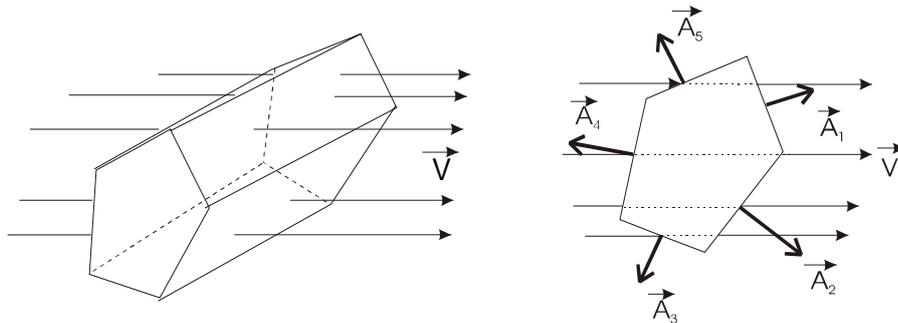
$$\Phi = \vec{v} \cdot \vec{A} \quad (2)$$

### b. Fluxo através de uma superfície fechada $\Sigma$

Seja  $\Sigma$  uma superfície fechada dentro de um campo vetorial  $\vec{v}$ . Definimos:

$$[\text{FLUXO}]_{(\text{sup. fechada})} = \frac{[\text{Quantidade de fluido que sai de } \Sigma \text{ no tempo } \Delta t]}{[\text{unidade de tempo}]} - \frac{[\text{Quantidade de fluido que entra em } \Sigma \text{ no tempo } \Delta t]}{[\text{unidade de tempo}]} \quad (3)$$

Apliquemos esta definição para o caso de uma superfície fechada, constituída pela junção de várias superfícies planas, dentro de um campo vetorial  $\vec{v}$  uniforme (veja figura):



Para calcularmos o fluxo, definiremos um vetor  $\vec{A}_j$  tal que:

$$\vec{A}_j = \begin{cases} \text{módulo: área } A \\ \text{direção: perpendicular à superfície } A \\ \text{sentido: aponta sempre para fora da superfície} \end{cases} \quad (4)$$

De acordo com o exemplo da figura acima, notamos que o fluido sai através de  $A_1$  e  $A_2$  e entra por  $A_3, A_4$  e  $A_5$ . Usando a relação (2) e a definição de fluxo (3), teremos:

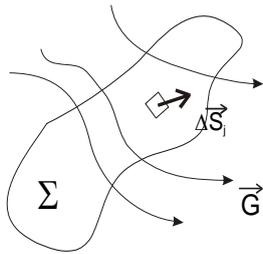
$$\Phi_{\Sigma} = \vec{v} \cdot \vec{A}_1 + \vec{v} \cdot \vec{A}_2 + \vec{v} \cdot \vec{A}_3 + \vec{v} \cdot \vec{A}_4 + \vec{v} \cdot \vec{A}_5 = \sum_{j=1}^5 \vec{v} \cdot \vec{A}_j \quad (5)$$

Observe que nas superfícies  $A_3$ ,  $A_4$  e  $A_5$  o vetor  $\vec{A}_j$  forma com  $\vec{v}$  um ângulo  $\theta$ , tal que  $90^\circ < \theta < 270^\circ$ , de sorte que  $\vec{v} \cdot \vec{A}_j = v A_j \cos \theta_j$  é negativo neste caso.

Podemos generalizar estas considerações, supondo agora uma superfície fechada constituída por  $N$  superfícies planas. Mais ainda: podemos supor que o campo não seja mais uniforme, mas que possa variar de região para região, com a condição de que assuma um valor constante  $\vec{v}_j$  na superfície  $A_j$ . O fluxo será portanto:

$$\Phi_{\Sigma \text{ (fechada)}} = \sum_j^N \vec{v}_j \cdot \vec{A}_j \quad (6)$$

## 2. INTEGRAL DE SUPERFÍCIE



Suponha agora que uma superfície fechada  $\Sigma$ , de formato qualquer, seja inserida em um campo vetorial  $\vec{G}$  não uniforme. Para definirmos o fluxo, tomaremos o seguinte procedimento:

- Dividimos a superfície em pequenas superfícies de área  $\Delta A_j$  de forma que:
  - $\Delta A_j$  seja *aproximadamente* plana
  - O campo  $G_j$  nessa superfície seja *aproximadamente* constante

b. Definimos o vetor  $\Delta \vec{A}_j$  de acordo com a definição (4)

c. O fluxo no elemento de área  $\Delta A_j$  será  $\Delta \Phi_j \cong \vec{G}_j \cdot \Delta \vec{A}_j$

d. O fluxo total através de  $\Sigma$  será aproximadamente  $\Phi \cong \sum_j^N \vec{G}_j \cdot \Delta \vec{A}_j$

e. Para encontrarmos o valor exato do fluxo, fazemos  $\Delta A_j \rightarrow 0$ . Definimos então **integral de superfície** ao limite:

$$\Phi = \oint \vec{G} \cdot d\vec{A} = \lim_{\Delta A_j \rightarrow 0} \sum_j^N \vec{G}_j \cdot \Delta \vec{A}_j$$

f. Naturalmente podemos definir a integral de superfície para uma *superfície aberta* também. O procedimento é o mesmo, com duas pequenas modificações. A primeira delas se refere à definição do vetor elemento de área  $\Delta \vec{A}_j$ . Neste caso, este vetor é definido de acordo com a definição (1) ao invés de (4). Em segundo lugar, há uma modificação na notação, de forma que:

$$\Phi_{\Sigma \text{ (aberta)}} = \int \vec{G} \cdot d\vec{A} = \lim_{\Delta A_j \rightarrow 0} \sum_j^N \vec{G}_j \cdot \Delta \vec{A}_j$$

g. O fluxo de um campo vetorial  $\vec{G}$  através de uma superfície fechada  $\Sigma$  tem o seguinte significado físico:

$$[\text{FLUXO}]_{\text{(sup. fechada)}} = \frac{[\text{Quantidade de (...) que sai de } \Sigma \text{ no tempo } \Delta t]}{[\text{unidade de tempo}]} - \frac{[\text{Quantidade de (...) que entra em } \Sigma \text{ no tempo } \Delta t]}{[\text{unidade de tempo}]}$$

onde (...) é uma palavra que depende de qual seja o campo  $\vec{G}$  considerado. Assim, se

$\vec{G} = \vec{v}$  (campo de velocidades), (...) = fluido

$\vec{G} = \vec{J}$  (densidade de corrente), (...) = carga

$\vec{G} = \vec{S}$  (vetor de Poynting), (...) = energia eletromagnética

No caso de  $\vec{G} = \vec{E}$  (campo elétrico) ou  $\vec{G} = \vec{B}$  (campo magnético), o fluxo será uma quantidade tal que:

$$\Phi \propto [\text{número de linhas de campo que saem de } \Sigma] - [\text{número de linhas de campo que entram em } \Sigma]$$

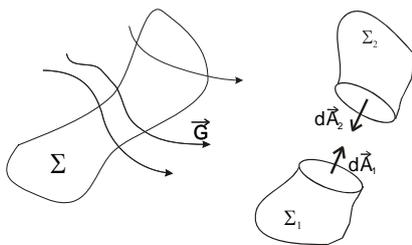
## 2. O DIVERGENTE

Do estudo precedente é fácil verificar que se  $\Phi \neq 0$ , haverá divergência ou convergência (divergência negativa) do campo em relação à superfície fechada  $\Sigma$ . Mas agora, ao invés de concentrarmos no fluxo em uma região do espaço, desejamos fazer este estudo em relação a um ponto e em suas vizinhanças. A idéia central, portanto, é fazer a superfície tender a zero e calcular o fluxo nesse limite. Contudo, se diminuirmos a superfície, o fluxo também irá diminuir, até se anular no limite  $A_j \rightarrow 0$ . Porém, se calcularmos a razão entre o fluxo através de  $\Delta A_j$  pelo volume  $\Delta V_j$ , observaremos que ela *tenderá a um valor limite* quando  $\Delta V_j \rightarrow 0$ . É justamente esta propriedade que estamos buscando.

Definimos então, o divergente de uma função vetorial  $\vec{G}$  à grandeza:

$$\text{div } \vec{G} = \lim_{\Delta V_j \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{G} \cdot d\vec{A}_j}{\Delta V_j}$$

### a. Teorema de Gauss



Seja uma superfície fechada  $\Sigma$  dentro de um campo vetorial  $\vec{G}$ . Ao dividirmos a superfície em duas superfícies fechadas  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$ , veremos que a soma dos fluxos através destas duas superfícies reproduzirá o fluxo original, uma vez que os vetores  $d\vec{A}_1$  e  $d\vec{A}_2$ , que descrevem a interface entre  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$ , têm mesmo módulo e direção, mas sentidos opostos. Assim, devemos ter  $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$

Se dividirmos a superfície  $\Sigma$  em  $N$  superfícies fechadas, a soma dos fluxos através de todas essas superfícies reproduzirá o fluxo original, isto é:

$$\oint \vec{G} \cdot d\vec{A} = \sum_j^N \oint \vec{G} \cdot d\vec{A}_j$$

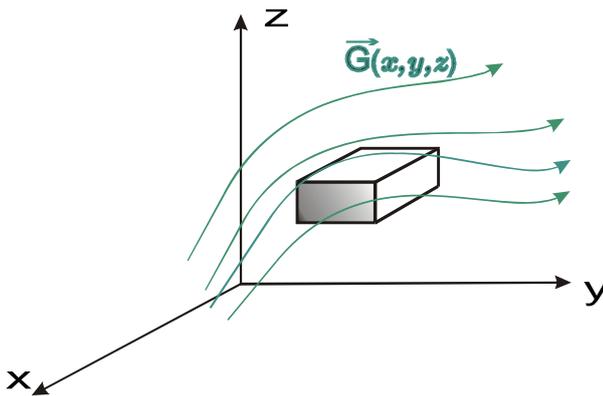
Observe que podemos reescrever esta expressão na forma:

$$\oint \vec{G} \cdot d\vec{A} = \sum_j^N \left[ \frac{\oint \vec{G} \cdot d\vec{A}_j}{\Delta V_j} \right] \cdot \Delta V_j$$

Ao passarmos ao limite de  $\Delta V_j \rightarrow 0$ , a quantidade entre os parênteses é o próprio divergente de  $\vec{G}$  e a somatória, por definição, é a integral de volume. Assim

$$\oint \vec{G} \cdot d\vec{A} = \int (\text{div } \vec{G}) dV$$

### b. O divergente em coordenadas cartesianas

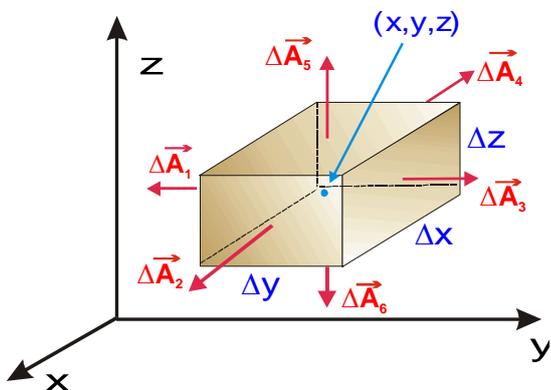


Seja um vetor  $\vec{G}$ , expresso em termos das coordenadas cartesianas :

$$\vec{G} = G_x(x,y,z) \vec{i} + G_y(x,y,z) \vec{j} + G_z(x,y,z) \vec{k}$$

Seja também um volume  $\Delta V$  constituído por uma caixa retangular de lados  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  e  $\Delta z$ . Vamos calcular o fluxo através desta caixa:  $\Delta \Phi = \oint \vec{G} \cdot d\vec{A}$ , dividi-lo pelo volume  $\Delta V$  e fazer o limite  $\Delta V \rightarrow 0$ .

Note que  $\Delta \Phi$  pode ser calculado somando-se os fluxos através de cada face da caixa.



No entanto, como estamos supondo que a caixa tem dimensões pequenas é razoável supor que, em cada face, o campo é aproximadamente constante e igual ao valor calculado em seu centro. Assim, o valor do fluxo para cada face  $i$ , será :  $\Delta \Phi_i = \vec{G}_i \cdot \Delta \vec{A}_i$ . Podemos ver na figura que os vetores  $\Delta \vec{A}$  em cada face são:

$$\begin{aligned} \Delta \vec{A}_1 &= -\Delta x \Delta z \vec{j} & \Delta \vec{A}_2 &= \Delta y \Delta z \vec{i} \\ \Delta \vec{A}_3 &= \Delta x \Delta z \vec{j} & \Delta \vec{A}_4 &= -\Delta y \Delta z \vec{i} \\ \Delta \vec{A}_5 &= \Delta x \Delta y \vec{k} & \Delta \vec{A}_6 &= -\Delta x \Delta y \vec{k} \end{aligned}$$

O fluxo na face 1 deverá ser então  $\Delta\Phi_1 = \vec{G}(1) \cdot \Delta\vec{A}_1 = -G_y(1)\Delta x\Delta z$ . Note que  $G_y(1)$  é a componente  $y$  do campo no *centro da face 1*. Qual é a relação entre  $G_y(1)$  e a componente  $y$  do campo no *centro da caixa*  $G_y(x,y,z)$ ? Escrevendo  $G_y(1)$  como:

$$G_y(1) = G_y\left(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z\right)$$

obtemos do cálculo diferencial:  $G_y(x,y,z) - G_y\left(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z\right) = \frac{\partial G_y}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} + \varepsilon_1 \Delta y$

onde  $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$  e  $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0 \\ \Delta z \rightarrow 0}} \varepsilon_1 = 0$

Logo:

$$\Delta\Phi_1 = -\left(G_y - \frac{\partial G_y}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} - \varepsilon_1 \Delta y\right) \Delta x \Delta z \quad \text{onde } G_y = G_y(x,y,z)$$

Escrevendo  $G_x = G_x(x,y,z)$  e  $G_z = G_z(x,y,z)$ , chegamos ao fluxo das demais faces da caixa:

$$\Delta\Phi_2 = G_x(2)\Delta y\Delta z = \left(G_x + \frac{\partial G_x}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} + \varepsilon_2 \Delta x\right) \Delta y \Delta z$$

$$\Delta\Phi_3 = G_y(3)\Delta x\Delta z = \left(G_y + \frac{\partial G_y}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} + \varepsilon_1 \Delta y\right) \Delta x \Delta z$$

$$\Delta\Phi_4 = -G_x(4)\Delta y\Delta z = -\left(G_x - \frac{\partial G_x}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} + \varepsilon_2 \Delta x\right) \Delta y \Delta z$$

$$\Delta\Phi_5 = G_z(5)\Delta x\Delta y = \left(G_z + \frac{\partial G_z}{\partial z} \frac{\Delta z}{2} + \varepsilon_3 \Delta z\right) \Delta x \Delta y$$

$$\Delta\Phi_6 = -G_z(6)\Delta x\Delta y = -\left(G_z - \frac{\partial G_z}{\partial z} \frac{\Delta z}{2} + \varepsilon_3 \Delta z\right) \Delta x \Delta y$$

O fluxo através da caixa será portanto:

$$\Delta\Phi = \sum_{i=1}^6 \Delta\Phi_i = \left[ \frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{\partial G_z}{\partial z} + 2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \right] \Delta x \Delta y \Delta z$$

Como  $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$  e  $\text{div } \vec{G} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta V}$ , então:

$$\text{div } \vec{G} = \frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{\partial G_z}{\partial z}$$

Se introduzimos o operador vetorial diferencial *nabla*  $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$  teremos:

$$\operatorname{div} \vec{G} = \vec{\nabla} \cdot \vec{G} = \frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{\partial G_z}{\partial z}$$

#### **BIBLIOGRAFIA**

1. Purcell E.M., *Curso de Física de Berkeley - vol.2*, Ed. Edgard Blucher, 1973, São Paulo.
2. Feynman R., *Lectures on Physics - vol. 2*, Fondo Educativo Interamericano, 1972, Bogotá
3. Hsu, H.P., *Análise vetorial*, Livros Técnicos e Científicos, 1972, Rio de Janeiro.